Άλγεβρα Α΄ Λυκείου

Θέματα εξετάσεων

1. **α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{\sqrt{\alpha^3}\cdot\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[4]{\alpha^{-6}}}{\left(\sqrt[5]{\alpha}\right)^{10}\cdot\sqrt{\alpha^{-2}}\cdot\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}$, όπου $\alpha > 0$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\left|x-\frac{1}{2}\right|-\frac{2|2x-1|+2}{3}+|6x-3|=2$

2. **α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $\lambda\left(x^2+x+1\right)=3x^2$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι ρίζες αυτές ικανοποιούν τη σχέση $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+\left(\dfrac{3}{\lambda-3}\right)^2$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda\left(x^2+x+1\right)<3x^2$ για κάθε πραγματικό x.

3. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2-4x+4}\geq|4-2x|-1$.

4. Δίνονται τα τριώνυμα $f(x)=2x^2-(\lambda+1)x+1$ και $g(x)=-x^2+6x-4\lambda+2$.

α) Αν το $f(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1, να αποδείξετε ότι το $g(x)$ έχει πραγματικές ρίζες και άνισες.

β) Για $\lambda = -4$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του $g(x)$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{(2x_1+1)\cdot(2x_2+1)}{(x_1-1)(x_2-1)-36}.$$

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(2\lambda-1)x+\lambda^2=0$

α) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές;

β) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και αντίστροφες;

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν τα $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_1^2+x_2^2\leq x_1+x_2+4$.

δ) Αν x_1 και x_2 είναι οι δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες $\rho_1=\dfrac{1}{x_1}$ και $\rho_2=\dfrac{1}{x_2}$.

6. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ για τους οποίους ισχύει: $|\kappa-3|+|10-2\lambda|=0$ (1).

α) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.

β) Για κ=3 και λ=5 να λύσετε την ανίσωση $\big||x+k|-\lambda\big|\leq 1$ (2)

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\lambda+3)x+\lambda+6=0, \lambda\in\mathbb{R}$.Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:

α) Η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β) Να ισχύει $x^2+(\lambda+3)x+\lambda+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

askisopolis

γ) Αν η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες τις $x_1,\ x_2$, να ισχύει: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2$.

8. α) Αν $A=\frac{2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[12]{2^5}}}$, να αποδείξετε ότι $A=\sqrt{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > A^2$ η παράσταση $B=\left|x+\sqrt{2}-A\right|-\left|3x-2\right|+A^2x$ είναι ανεξάρτητη του x.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+2(\lambda-2)x+3\lambda^2-\lambda-1\ ,x\in\mathbb{R}$

α) Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

β) 1. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x σε δυο διαφορετικά σημεία;

2. Αν x_1,x_2 αποτελούν δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει : $\left|x_1\cdot x_2\right|\geq 3$.

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

11. α) Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις: $A=\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+1}}, x>1$ και

$$B=2\left(\sqrt[8]{3^2\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^3.$$

β) Αν οι αριθμοί $A,\ |x-2014|+4,\ B$ είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου, να βρείτε τον αριθμό x, τον ν-οστό όρο της προόδου καθώς και το άθροισμα των τριάντα πρώτων όρων της.

12. Οι πλευρές $x_1,\ x_2$ ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0, \lambda\in(0,4).$$

α) Να βρείτε :

i) Την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda\in(0\ ,\ 4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

13. Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda^2-3=0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

α) Η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει δύο αρνητικές ρίζες.

γ) Ισχύει η ανισότητα $x_1(x_1-x_2)-3x_1\geq x_2(3-x_2)$ όπου x_1,x_2 οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{3x^2-\alpha^2x+1}{|\alpha|x-2}$ και το σημείο $M\left(\sqrt[3]{27},\sqrt[10]{2\sqrt[3]{4}}\cdot\sqrt[6]{2^{11}}\right)$.

α) Να δείξετε ότι $M(3,4)$

β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f να

askisopolis

διέρχεται από το σημείο Μ.

γ) Αν $\alpha = -2$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή $f(x) = \frac{3x-1}{2}$.

15. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (1-\lambda)x + 2\lambda + 3 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο θετικές πραγματικές και άνισες ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 οι άνισες πραγματικές ρίζες της (1), να εξετάσετε αν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιούν τη σχέση $|x_1 + x_2| + \lambda^2 - 8\lambda = x_1^2 + x_2^2$.

askisopolis

Λύσεις

ΘΕΜΑ Π

1. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{\sqrt{\alpha^3}\cdot\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[4]{\alpha^{-6}}}{\left(\sqrt[5]{\alpha}\right)^{10}\cdot\sqrt{\alpha^{-2}}\cdot\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}$ **, όπου α > 0**

β) Να λύσετε την εξίσωση $2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{2|2x-1|+2}{3}+|6x-3|=2$

Λύση

α) <u>α΄ τρόπος</u>

$$\frac{\sqrt{\alpha^3}\cdot\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[4]{\alpha^{-6}}}{\left(\sqrt[5]{\alpha}\right)^{10}\cdot\sqrt{\alpha^{-2}}\cdot\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}=\frac{\sqrt[2\cdot10]{\alpha^{3\cdot10}}\cdot\sqrt[5\cdot4]{\alpha^{2\cdot4}}\cdot\sqrt[5\cdot4]{\alpha^{-6\cdot5}}}{\alpha^2\cdot\sqrt{\left(\alpha^{-1}\right)^2}\cdot\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}=\frac{\sqrt[20]{\alpha^{30}\cdot\alpha^{8}\cdot\alpha^{-30}}}{\alpha^2\cdot\alpha^{-1}\cdot\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}$$

$$\frac{\sqrt[20]{\alpha^{30+8-30}}}{\alpha^{2-1}\cdot\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}=\frac{\sqrt[20]{\alpha^{8}}}{\alpha\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}=\frac{1}{\alpha}\sqrt[5]{\frac{\alpha^2}{\alpha^{-3}}}=\frac{1}{\alpha}\sqrt[5]{\alpha^{2-(-3)}}=\frac{1}{\alpha}\sqrt[5]{\alpha^5}=\frac{1}{\cancel{\alpha}}\cancel{\alpha}=1$$

<u>β΄τρόπος</u>

$$\frac{\sqrt{\alpha^3}\cdot\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[4]{\alpha^{-6}}}{\left(\sqrt[5]{\alpha}\right)^{10}\cdot\sqrt{\alpha^{-2}}\cdot\sqrt[5]{\alpha^{-3}}}=\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}\cdot\alpha^{\frac{2}{5}}\cdot\alpha^{\frac{-6}{4}}}{\alpha^{\frac{10}{5}}\cdot\alpha^{\frac{-2}{2}}\cdot\alpha^{\frac{-3}{5}}}=\frac{\alpha^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}-\frac{3}{2}}}{\alpha^{2-1-\frac{3}{5}}}=\frac{\alpha^{\frac{2}{5}}}{\alpha^{\frac{2}{5}}}=1$$

β) $2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{2|2x-1|+2}{3}+|6x-3|=2\Leftrightarrow$

$$|2x-1|-\frac{2|2x-1|+2}{3}+3|2x-1|=2\Leftrightarrow$$

$$3\cdot|2x-1|-\left(2|2x-1|+2\right)+9|2x-1|=6\Leftrightarrow$$

$$3|2x-1|-2|2x-1|-2+9|2x-1|=6\Leftrightarrow$$

$$10\cdot|2x-1|=8\Leftrightarrow$$

$$|2x-1|=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow$$

$$\left(2x-1=\frac{4}{5}\Leftrightarrow 2x=1+\frac{4}{5}\Leftrightarrow 2x=\frac{9}{5}\Leftrightarrow x=\frac{9}{10}\right)$$

$$\text{ή}\ \left(2x-1=-\frac{4}{5}\Leftrightarrow 2x=1-\frac{4}{5}\Leftrightarrow 2x=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x=\frac{1}{10}\right)$$

2. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ **η εξίσωση** $\lambda\left(x^2+x+1\right)=3x^2$ **έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.**

β) Αν x_1, x_2 **οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του** $\lambda\in\mathbb{R}$ **οι ρίζες αυτές ικανοποιούν τη σχέση** $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+\left(\dfrac{3}{\lambda-3}\right)^2$**.**

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ **ισχύει** $\lambda\left(x^2+x+1\right)<3x^2$ **για κάθε πραγματικό x.**

Λύση

askisopolis

α) $\lambda\left(x^2+x+1\right)=3x^2 \Leftrightarrow \lambda x^2+\lambda x+\lambda-3x^2=0 \Leftrightarrow (\lambda-3)x^2+\lambda x+\lambda=0$

Πρέπει η εξίσωση να είναι 2ου βαθμού δηλαδή $\lambda-3\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 3$ και

$\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4(\lambda-3)\cdot\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda^2+12\lambda>0 \Leftrightarrow -3\lambda^2+12\lambda>0 \overset{(:-3)}{\Leftrightarrow}$

$\lambda^2-4\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-4)<0 \Leftrightarrow \lambda\in(0,4)$

β) Από τις σχέσεις Vietta έχουμε $S=x_1+x_2=-\dfrac{\lambda}{\lambda-3}=\dfrac{\lambda}{3-\lambda}$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda}{\lambda-3}$

Οπότε $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+\left(\dfrac{3}{\lambda-3}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1x_2+\left(\dfrac{3}{\lambda-3}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{\lambda}{3-\lambda}\right)^2-2\dfrac{\lambda}{\lambda-3}=\dfrac{\lambda}{\lambda-3}+\left(\dfrac{3}{\lambda-3}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^2}{(\lambda-3)^2}-2\dfrac{\lambda}{\lambda-3}=\dfrac{\lambda}{\lambda-3}+\dfrac{9}{(\lambda-3)^2} \overset{(\lambda-3)^2}{\Leftrightarrow}$

$\lambda^2-2\lambda(\lambda-3)=\lambda(\lambda-3)+9 \Leftrightarrow \cancel{\lambda^2}-2\lambda^2+6\lambda=\cancel{\lambda^2}-3\lambda+9 \Leftrightarrow -2\lambda^2+9\lambda-9=0$

$\Delta=9^2-4\cdot(-2)\cdot(-9)=81-72=9$ και

$\lambda_1=\dfrac{-9+3}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-6}{-4}=\dfrac{3}{2}$ δεκτή , $\lambda_2=\dfrac{-9-3}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-12}{-4}=3$ απορρίπτεται

γ) $\lambda\left(x^2+x+1\right)<3x^2 \Leftrightarrow (\lambda-3)x^2+\lambda x+\lambda<0$.

Πρέπει $\Delta<0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ και $\lambda-3<0 \Leftrightarrow \lambda<3$

Άρα για $\lambda\in(-\infty,0)$ ισχύει $\lambda\left(x^2+x+1\right)<3x^2$ για κάθε πραγματικό x.

3. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2-4x+4}\geq|4-2x|-1$.

Λύση

$\sqrt{x^2-4x+4}\geq|4-2x|-1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}\geq|2x-4|-1 \Leftrightarrow |x-2|\geq 2|x-2|-1 \Leftrightarrow |x-2|\leq 1 \Leftrightarrow$

$-1\leq x-2\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 3 \Leftrightarrow x\in[1,3]$

4. Δίνονται τα τριώνυμα $f(x)=2x^2-(\lambda+1)x+1$ και $g(x)=-x^2+6x-4\lambda+2$.

α) Αν το $f(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1, να αποδείξετε ότι το $g(x)$ έχει πραγματικές ρίζες και άνισες.

β) Για λ = - 4, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του $g(x)$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{(2x_1+1)\cdot(2x_2+1)}{(x_1-1)(x_2-1)-36}.$$

Λύση

α) Αφού το $f(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1 ισχύει ότι

$f(-1)=0 \Leftrightarrow 2\cdot(-1)^2-(\lambda+1)\cdot(-1)+1=0 \Leftrightarrow 2+\lambda+1+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-4$

Οπότε $f(x)=2x^2+3x+1$ και $g(x)=-x^2+6x+18$.

$\Delta=6^2-4\cdot 18\cdot(-1)=36+72=108>0$ άρα το τριώνυμο $g(x)$ έχει πραγματικές ρίζες και άνισες.

β) Για $\lambda=-4$: $g(x)=-x^2+6x+18$.

Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=-\dfrac{6}{-1}=6$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{18}{-1}=-18$.

$$A=\frac{(2x_1+1)\cdot(2x_2+1)}{(x_1-1)(x_2-1)-36}=\frac{4x_1x_2+2x_1+2x_2+1}{x_1x_2-x_1-x_2+1-36}=\frac{4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1-36}=$$

$$\frac{4(-18)+2\cdot 6+1}{-18-6+1-36}=\frac{-72+12+1}{-59}=\frac{-59}{-59}=1$$

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(2\lambda-1)x+\lambda^2=0$

α) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές;

β) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και αντίστροφες;

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης να βρεθούν τα $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $x_1^2+x_2^2\le x_1+x_2+4$.

δ) Αν x_1 και x_2 είναι οι δυο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες $\rho_1=\frac{1}{x_1}$ και $\rho_2=\frac{1}{x_2}$.

Λύση

α) Πρέπει $\Delta\ge 0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2-4\cdot 1\cdot\lambda^2\ge 0\Leftrightarrow \cancel{4\lambda^2}-4\lambda+1-\cancel{4\lambda^2}\ge 0\Leftrightarrow 4\lambda\le 1\Leftrightarrow\lambda\le\frac{1}{4}$

β) Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow\lambda<\frac{1}{4}$ και $P=x_1\cdot x_2=1\Leftrightarrow\lambda^2=1\overset{\lambda\le\frac{1}{4}}{\Leftrightarrow}\lambda=-1$

γ) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=-\frac{2\lambda-1}{1}=-2\lambda+1$ και $P=x_1\cdot x_2=\lambda^2$.

$$x_1^2+x_2^2\le x_1+x_2+4\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\le x_1+x_2+4\Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda+1)^2-2\lambda^2\le-2\lambda+1+4\Leftrightarrow 4\lambda^2-4\lambda+1-2\lambda^2\le-2\lambda+5\Leftrightarrow$$

$$2\lambda^2-2\lambda-4\le 0\overset{(:2)}{\Leftrightarrow}\lambda^2-\lambda-2\le 0\Leftrightarrow\lambda\in[-1,2]$$

δ) $S'=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{-2\lambda+1}{\lambda^2}$

$P'=\rho_1\cdot\rho_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{\lambda^2}$

Η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$x^2-S'x+P'=0\Leftrightarrow x^2-\frac{-2\lambda+1}{\lambda^2}x+\frac{1}{\lambda^2}=0\Leftrightarrow\lambda^2x^2+(2\lambda-1)x+1=0$$

6. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ για τους οποίους ισχύει: $|\kappa-3|+|10-2\lambda|=0$ (1).

α) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.

β) Για κ=3 και λ=5 να λύσετε την ανίσωση $\big||x+k|-\lambda\big|\le 1$ (2)

Λύση

α) $(1)\Rightarrow\kappa-3=0\Leftrightarrow\kappa=3$ και $10-2\lambda=0\Leftrightarrow 2\lambda=10\Leftrightarrow\lambda=5$

β) Για κ=3 και λ=5: $(2)\Rightarrow\big||x+3|-5\big|\le 1\Leftrightarrow-1\le|x+3|-5\le 1\Leftrightarrow 4\le|x+3|\le 6$ (3)

Για $x\ge-3$: $(3)\Rightarrow 4\le x+3\le 6\Leftrightarrow 1\le x\le 3$

Για $x<-3$: $(3)\Rightarrow 4\le -x-3\le 6\Leftrightarrow -6\le x+3\le -4\Leftrightarrow -9\le x\le -7$

Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων $[-9,-7]\cup[1,3]$

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\lambda+3)x+\lambda+6=0, \lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:

α) Η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές ρίζες.

β) Να ισχύει $x^2+(\lambda+3)x+\lambda+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Αν η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2, να ισχύει: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2$.

Λύση

α) Πρέπει $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2-4\cdot 1\cdot(\lambda+6)\ge 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2+6\lambda+9-4\lambda-24\ge 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2+2\lambda-15\ge 0 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,-5]\cup[3,+\infty)$

λ	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$\lambda^2+2\lambda-15$	+	–	+	

β) Πρέπει $\Delta<0 \Leftrightarrow \lambda\in(-5,3)$

γ) Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=-\frac{\lambda+3}{1}=-\lambda-3$ και $P=x_1\cdot x_2=\frac{\lambda+6}{1}=\lambda+6$.

Πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow \lambda\in(-5,3)$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<2 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<2 \Leftrightarrow \frac{-\lambda-3}{\lambda+6}<2 \overset{\lambda\in(-5,3)}{\underset{(\cdot(\lambda+6))}{\Leftrightarrow}} -\lambda-3<2\lambda+12 \Leftrightarrow 3\lambda>-15 \Leftrightarrow \lambda>-5$$

Άρα $\lambda\in(-3,3)$.

8. α) Αν $A=\frac{2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[12]{2^5}}$, να αποδείξετε ότι $A=\sqrt{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > A^2$ η παράσταση $B=\left|x+\sqrt{2}-A\right|-|3x-2|+A^2x$ είναι ανεξάρτητη του x.

Λύση

α) $$A=\frac{2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{2}}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[12]{2^5}}=\frac{2\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[12]{2}}{\sqrt[3]{2\sqrt{\sqrt{2^2\cdot 2}}}\cdot\sqrt[12]{2^5}}=\frac{2\cdot 2^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2^3}}\cdot\sqrt[12]{2^5}}=$$

$$\frac{2^{1+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}}{\sqrt[12]{2^7}\cdot\sqrt[12]{2^5}}=\frac{2^{\frac{12+2+3+1}{12}}}{\sqrt[12]{2^{12}}}=\frac{2^{\frac{18}{12}}}{2}=2^{\frac{18}{12}-1}=2^{\frac{6}{12}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.$$

β) Για $A=\sqrt{2}$: $x>\sqrt{2}^2=2$ και

$B=\left|x+\sqrt{2}-\sqrt{2}\right|-|3x-2|+\sqrt{2}^2x=|x|-|3x-2|+2x=x-3x+2+2x=2$

αφού $x>2 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow 3x-2>6-2=4>0$

askisopolis

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+2(\lambda-2)x+3\lambda^2-\lambda-1$,$x\in\mathbb{R}$

α) Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

β) 1. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x σε δυο διαφορετικά σημεία;

2. Αν x_1,x_2 αποτελούν δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει : $|x_1\cdot x_2|\geq 3$

Λύση

Α. Πρέπει $\Delta>0\Leftrightarrow\left[2(\lambda-2)\right]^2-4\cdot1\cdot(3\lambda^2-\lambda-1)>0\Leftrightarrow\ 4(\lambda-2)^2-12\lambda^2+4\lambda+4>0\Leftrightarrow$

$4(\lambda^2-4\lambda+4)-12\lambda^2+4\lambda+4>0\Leftrightarrow\ 4\lambda^2-16\lambda+16-12\lambda^2+4\lambda+4>0\Leftrightarrow$

$-8\lambda^2-12\lambda+20>0\overset{:(-4)}{\Leftrightarrow}2\lambda^2+3\lambda-5<0\Leftrightarrow$

$(\lambda-1)(2\lambda+5)<0\Leftrightarrow\ \lambda\in\left(-\frac{5}{2},1\right)$

λ	$-\infty$ - 5/2	1	$+\infty$
$2\lambda^2+3\lambda-5$	+	–	+

Β. 1. Πρέπει να έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες δηλαδή $\Delta>0$ άρα $\lambda\in\left(-\frac{5}{2},1\right)$

2. Επειδή έχει δύο ρίζες άνισες, είναι $\Delta>0\Leftrightarrow\lambda\in\left(-\frac{5}{2},1\right)$.

Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $P=x_1\cdot x_2=\frac{3\lambda^2-\lambda-1}{1}=3\lambda^2-\lambda-1$

$|x_1\cdot x_2|\geq3\Leftrightarrow|3\lambda^2-\lambda-1|\geq3\Leftrightarrow$

$\left(3\lambda^2-\lambda-1\geq3\Leftrightarrow3\lambda^2-\lambda-4\geq0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)\right)$ ή

$\left(3\lambda^2-\lambda-1\leq-3\Leftrightarrow3\lambda^2-\lambda+2\leq0\right.$ αδύνατη γιατί $\left.\Delta<0\right)$

Επομένως $|x_1\cdot x_2|\geq3$ για $\lambda\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

10.Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

Λύση

α) Αφού έχει η εξίσωση έχει λύση το 1, ο αριθμός 1 την επαληθεύει, δηλαδή

$1^2-(\lambda-1)\cdot1+6=0\Leftrightarrow1-\lambda+1+6=0\Leftrightarrow\lambda=8$

β) $(1)\overset{\lambda=2}{\Rightarrow}x^2-x+6=0$.

$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot6=1-24=-23<0$ οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

askisopolis

11.α) Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις: $A=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+1}}, x>1$ **και**

$B=2\left(\sqrt[8]{3^2\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^3$.

β) Αν οι αριθμοί $A, |x-2014|+4, B$ **είναι οι τρεις πρώτοι όροι μιας αριθμητικής προόδου, να βρείτε τον αριθμό x, τον ν-οστό όρο της προόδου καθώς και το άθροισμα των τριάντα πρώτων όρων της.**

Λύση

α) $A=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+1}}=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2}}=\dfrac{2(x-1)}{|x-1|}\overset{x>1}{=}\dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2$

$B=2\left(\sqrt[8]{3^2\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}}\right)^3=2\left(\sqrt[8]{3^2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{3^3\cdot 3}}}\right)^3=2\left(\sqrt[8]{3^2\sqrt[6]{3^4}}\right)^3=2\left(\sqrt[8]{\sqrt[6]{(3^2)^6 3^4}}\right)^3=$

$B=2\left(\sqrt[\cancel{48}\,3]{3^{\cancel{16}}}\right)^3=2\left(\sqrt[3]{3}\right)^3=2\cdot 3=6$

β) Για A=2 και B=6 έχουμε ότι οι αριθμοί $2, |x-2014|+4, 6$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

άρα $2(|x-2014|+4)=2+6\Leftrightarrow 2|x-2014|+8=8\Leftrightarrow 2|x-2014|=0\Leftrightarrow$

$|x-2014|=0\Leftrightarrow x-2014=0\Leftrightarrow x=2014.$

$\alpha_1=2,\ \omega=\alpha_2-\alpha_1=4-2=2$.

$\alpha_\nu=2+(\nu-1)\cdot 2=\cancel{2}+2\nu-\cancel{2}=2\nu$, $\alpha_{30}=2\cdot 30=60$, $S_{30}=\dfrac{30}{2}(2+60)=15\cdot 62=930$

12.Οι πλευρές x_1, x_2 **ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:**

$x^2-4\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)x+16=0, \lambda\in(0,4)$.

α) Να βρείτε :

i) Την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, **για κάθε** $\lambda\in(0\ ,\ 4)$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

Λύση

Από τις σχέσεις Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=\dfrac{4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)}{1}=4\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{16}{1}=16$

α) i) $\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\cdot 4\cdot\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)=8\lambda+\dfrac{8}{\lambda}$

ii) $E=x_1\cdot x_2=16$

β) $\Pi\geq 16\Leftrightarrow 8\lambda+\dfrac{8}{\lambda}\geq 16\overset{\cdot\lambda>0}{\Leftrightarrow}8\lambda^2+8\geq 16\lambda\Leftrightarrow 8\lambda^2-16\lambda+8\geq 0\overset{:8}{\Leftrightarrow}\lambda^2-2\lambda+1\geq 0\Leftrightarrow(\lambda-1)^2\geq 0$ ισχύει.

γ) $\Pi = 16 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

Για την τιμή αυτή έχουμε τότε την εξίσωση $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Άρα $x_1 = x_2 = 4 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 = 8$ οπότε το ορθογώνιο έχει ίσες πλευρές .

Επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε τετράγωνο.

13.Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda^2 - 3 = 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

α) Η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει δύο αρνητικές ρίζες.

γ) Ισχύει η ανισότητα $x_1(x_1 - x_2) - 3x_1 \geq x_2(3 - x_2)$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης.

Λύση

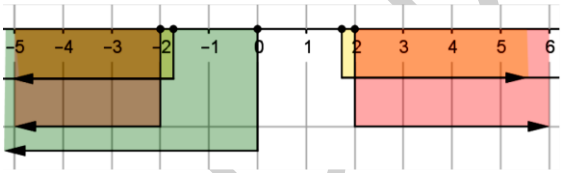
α) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, οπότε είναι αδύνατη όταν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4(\lambda^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 4\lambda^2 + 12 < 0 \Leftrightarrow 12 < 3\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2$ ή $\lambda > 2$

β) Από τους τύπους του Vietta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda^2 - 3$.

Η εξίσωση έχει δύο αρνητικές ρίζες όταν:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2 \\ \lambda^2 - 3 > 0 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2 \\ \lambda^2 > 3 \\ \lambda < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2 \\ \lambda < -\sqrt{3} \text{ ή } \lambda > \sqrt{3} \\ \lambda < 0 \end{cases}$$



Με συναλήθευση προκύπτει $\lambda < -2$

γ) $x_1(x_1 - x_2) - 3x_1 \geq x_2(3 - x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_1x_2 - 3x_1 \geq 3x_2 - x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) \geq 0$ (1)

Είναι $x_1 + x_2 = \lambda \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = \lambda^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = \lambda^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \lambda^2 - 2(\lambda^2 - 3) = -\lambda^2 + 6$ (2)

Από τις (1),(2) έχουμε: $-\lambda^2 + 6 - (\lambda^2 - 3) - 3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 6 - \lambda^2 + 3 - 3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$-2\lambda^2 - 3\lambda + 9 \geq 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda - 9 \leq 0$ (3)

Το τριώνυμο $2\lambda^2 + 3\lambda - 9$ έχει ρίζες το -3 και το $\frac{3}{2}$, οπότε η ανίσωση (3) αληθεύει όταν $\lambda \in [-3, -2)$.

14.Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x^2 - \alpha^2 x + 1}{|\alpha| x - 2}$ και το σημείο $M\left(\sqrt[3]{27}, \sqrt[10]{2\sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt[6]{2^{11}}\right)$.

α) Να δείξετε ότι $M(3,4)$.

β) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Μ.

γ) Αν $\alpha = -2$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι η f παίρνει τη μορφή $f(x) = \frac{3x - 1}{2}$.

Λύση

α) Είναι $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ και

$$\sqrt[10]{2\sqrt[3]{4}}\cdot\sqrt[6]{2^{11}}=\sqrt[10]{2\sqrt[3]{2^2}}\cdot 2^{\frac{11}{6}}=\sqrt[10]{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\cdot 2^{\frac{11}{6}}=\sqrt[10]{2^{1+\frac{2}{3}}}\cdot 2^{\frac{11}{6}}=\sqrt[10]{2^{\frac{5}{3}}}\cdot 2^{\frac{11}{6}}=2^{\frac{\frac{5}{3}}{10}}\cdot 2^{\frac{11}{6}}=2^{\frac{5}{30}}\cdot 2^{\frac{11}{6}}=$$

$$2^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{\frac{11}{6}}=2^{\frac{1}{6}+\frac{11}{6}}=2^2=4$$

άρα $M(3,4)$.

β) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το M αν και μόνο αν: $f(3)=4\Leftrightarrow$

$$\frac{3\cdot 3^2-\alpha^2\cdot 3+1}{|\alpha|\cdot 3-2}=4\Leftrightarrow 27-3\alpha^2+1=12|\alpha|-8\Leftrightarrow 0=3\alpha^2+12|\alpha|-36\overset{:3}{\Leftrightarrow}|\alpha|^2+4|\alpha|-12=0\ (1)$$

Θέτουμε $|\alpha|=\omega\geq 0$ και η (1) γίνεται $\omega^2+4\omega-12=0\Leftrightarrow\omega=-6$ απορρίπτεται ή $\omega=2$.

Άρα $|\alpha|=2\Leftrightarrow\alpha=\pm 2$.

γ) Αν $\alpha=-2$ είναι $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+1}{2x-2}$. Πρέπει $2x-2\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq 2\Leftrightarrow x\neq 1$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

Το τριώνυμο $3x^2-4x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4$ και ρίζες $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=1$, οπότε:

$$f(x)=\frac{3x^2-4x+1}{2x-2}=\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}}=\frac{3x-1}{2}$$

15.Δίνεται η εξίσωση $x^2+(1-\lambda)x+2\lambda+3=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τα $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Να βρείτε τα $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο θετικές πραγματικές και άνισες ρίζες.

γ) Αν x_1,x_2 οι άνισες πραγματικές ρίζες της (1), να εξετάσετε αν υπάρχουν $\lambda\in\mathbb{R}$ που να ικανοποιούν τη σχέση $|x_1+x_2|+\lambda^2-8\lambda=x_1^2+x_2^2$

Λύση

α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν $\Delta>0$.

Είναι $\Delta=(1-\lambda)^2-4(2\lambda+3)=1-2\lambda+\lambda^2-8\lambda-12=\lambda^2-10\lambda-11$

$\Delta>0\Leftrightarrow\lambda^2-10\lambda-11>0\Leftrightarrow\lambda<-1$ ή $\lambda>11$ (-1,11 ρίζες του τριωνύμου $\lambda^2-10\lambda-11$)

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες θετικές πραγματικές και άνισες όταν:

$$\begin{cases}\Delta>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda<-1\text{ ή }\lambda>11\\2\lambda+3>0\\-(1-\lambda)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda<-1\text{ ή }\lambda>11\\2\lambda>-3\\-1+\lambda>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda<-1\text{ ή }\lambda>11\\\lambda>-\frac{3}{2}\\\lambda>1\end{cases}.$$

Με συναλήθευση προκύπτει $\lambda>11$.

γ) Από τους τύπους του Vietta έχουμε: $S=x_1+x_2=-(1-\lambda)=\lambda-1$ και $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=2\lambda+3$.

Είναι $x_1+x_2=\lambda-1\Rightarrow(x_1+x_2)^2=(\lambda-1)^2\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(\lambda-1)^2\Leftrightarrow$

$x_1^2+x_2^2=\lambda^2-2\lambda+1-2(\lambda+3)=\lambda^2-4\lambda-5$

Οπότε $|x_1+x_2|+\lambda^2-8\lambda=x_1^2+x_2^2\Leftrightarrow|\lambda-1|+\cancel{\lambda^2}-8\lambda=\cancel{\lambda^2}-4\lambda-5\Leftrightarrow|\lambda-1|-4\lambda+5=0\ (1)$

askisopolis

Αν $\lambda-1\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\geq 1$ τότε η (1) γίνεται: $\lambda-1-4\lambda+5=0 \Leftrightarrow -3\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=\frac{4}{3}$ δεκτή και

αν $\lambda-1<0 \Leftrightarrow \lambda<1$ τότε η (1) γίνεται: $-\lambda+1-4\lambda+5=0 \Leftrightarrow 6=5\lambda \Leftrightarrow \lambda=\frac{6}{5}$ απορρίπτεται

askisopolis